



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on May 2

問題：以下の2問のどちらが難しいか？

A. $(1 + \frac{2001}{2002})^{2002/2001}$ と $(1 + \frac{2002}{2001})^{2001/2002}$ の大小を比較せよ。

B. $x > 0$ における函数 $f(x) = (1 + x)^{1/x}$ の増減表を書き、グラフの概形を描け。

増減表が得られれば特別なケースでの大小関係わかる。しかも増減表を求める問題の方が易しいと思う。

本当は $x > -1$ に拡張した $f(x)$ のグラフの概形を描くべきだと思う。

$(1 + x)^{1/x}$ ($x > 0$) が単調減少なことは、高利貸しの複利計算と解釈でき、利息が積み上がるまでの期間 $1/x$ が小さいほど高利になることを意味しています。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

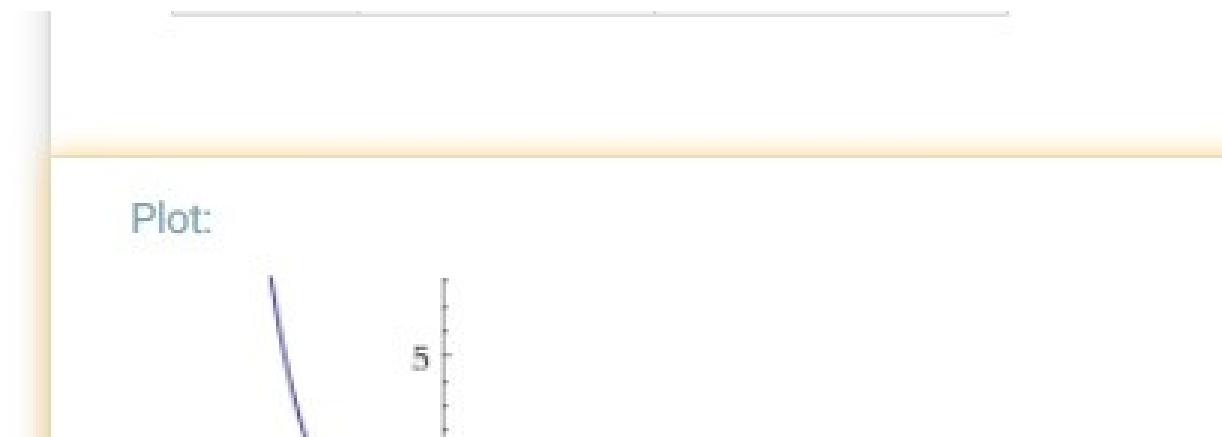
on May 2

グラフをすぐに見たいときにはブラウザだけでも使用可能な(携帯端末用のアプリもある)WolframAlphaがおすすめ。

`plot (1+x)^{1/x}, -1 < x < 3`

と入力すれば望むグラフが得られます。適当に略すと色々な情報を返してくれます。コマンドを一字一句正確に入力しなくてもよい点が優れていると思います。

wolframalpha.com/input/?i=plot... mathtod.online/media/jDoMHvA49...



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on May 2

WolframAlphaは微分もしてくれる。

微分結果のプロット

[wolframalpha.com/input/?i=\(d/d...](http://wolframalpha.com/input/?i=(d/d...)

対数微分のプロット

[wolframalpha.com/input/?i=\(d/d...](http://wolframalpha.com/input/?i=(d/d...)

対数微分の計算

[wolframalpha.com/input/?i=\(d/d...\)](http://wolframalpha.com/input/?i=(d/d...))



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on May 2

数学に現われる多くの量はその量そのもではなく、対数を取った後もしくは対数を取った後の主要項を選んだ方が好ましい場合が多いので、いくつか経験を積んで対数を取って考えるべき場面を判別できるようになっておくと色々便利です。

例えば、エントロピーは場合の数の対数、相対エントロピーは確率の対数、 $(1+x)^{1/x}$ も対数を取ってから扱った方が楽、Riemann面での相互法則におけるシンボル(記号)の対数は反復積分で書ける([github.com/genkuroki/CCSymbol/...](https://github.com/genkuroki/CCSymbol/))、などなど。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on May 2

$x > 0$ で $(1+x)^{1/x}$ が(狭義)単調減少することを素朴に示してみましよう。

それが単調減少することと、その対数 $f(x) = (1/x) \log(1+x)$ が単調減少することは同値である。

$f'(x)$ を計算すると、

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2},$$

$$g(x) = \frac{x}{1+x} - \log(1+x).$$

$x > 0$ で $g(x) < 0$ となることを示せば十分である。

$g'(x)$ を計算すると、

$$g'(x) = -\frac{x}{(1+x)^2}$$

ゆえに $x > 0$ で $g'(x) < 0$.

そして、 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ なので $x > 0$ で $g(x) < 0$ となる。

このように何も考えずに微分するだけで欲しい結果が得られます。

$(1+x)^{1/x}$ は $x > -1$ まで広げても同様に単調減少することがわかります。



黒木玄 Gen Kuroki

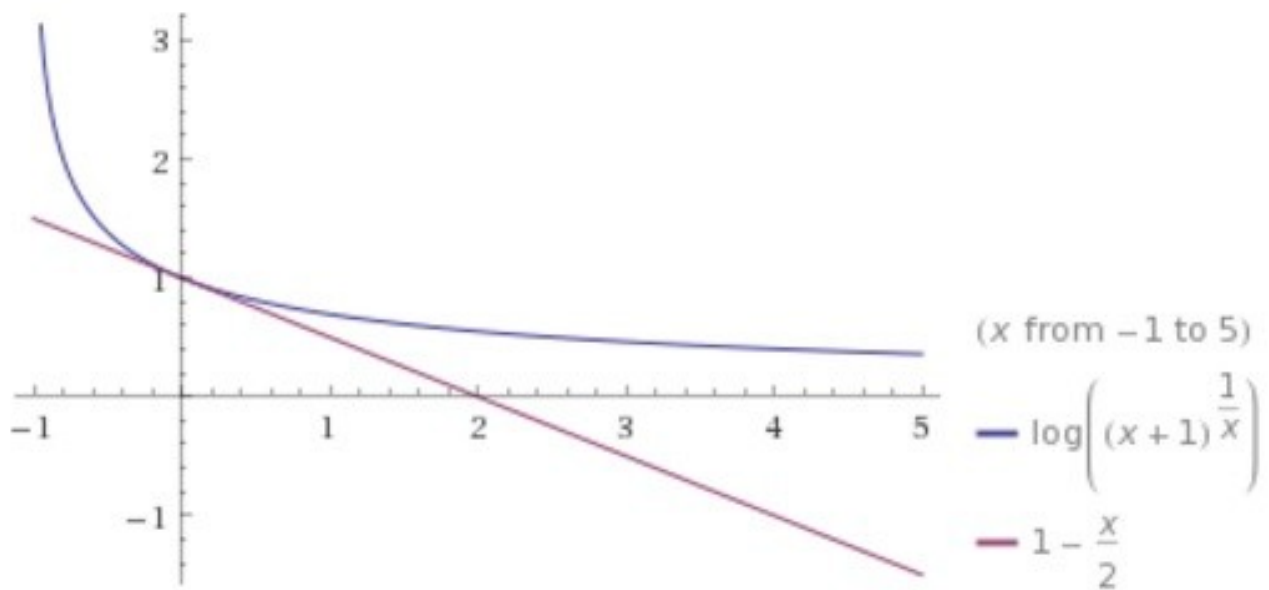
@genkuroki

WolframAlphaで $\log((1+x)^{1/x})$ とその接線 $1 - x/2$ のグラフをプロット

wolframalpha.com/input/?i=plot...

mathtod.online/media/yTIXgYNB9...

Plot:



2017年06月10日 13:03 · Web · 0 · 0 · Webで開く

mathtod.online powered by [Mastodon](#)